Massimi e minimi di funzioni definite su $\mathbb{R}^d$

Massimi e minimi su insiemi illimitati

Teorema 1. *Siano $D \subset \mathbb{R}^d$ un insieme chiuso ed $F : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua su D. Allora, vale (almeno) una delle proprietà seguenti:*

(1) *esiste un punto $X_0 \in D$ tale che* $F(X_0) = \sup_{X \in D} F(X)$;

(2) $\sup_{X \in D} F(X) = \limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in D}} F(X)$.

Dimostrazione. Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione che realizza l'estremo superiore, ovvero

$$\sup_{X \in D} F(X) = \lim_{n \to \infty} F(X_n).$$

Consideriamo due casi.
Caso 1. X_n è una successione limitata. Allora, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente ad un qualche $X_0 \in \mathbb{R}^d$. Inoltre, siccome D è chiuso, abbiamo che $X_0 \in D$:

$$\lim_{k \to \infty} X_{n_k} = X_0 \in D.$$

Per la continuità di F,

$$F(X_0) = \lim_{k \to \infty} F(X_{n_k}) = \sup_{X \in D} F(X).$$

Caso 2. la successione X_n non è limitata. Allora, esiste una sottosuccessione $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, tale che

$$\lim_{k \to \infty} |X_{n_k}| = +\infty.$$

Definiamo

$$r_k := |X_{n_k}|.$$

Allora,

$$\sup_{X \in D} F(X) = \lim_{k \to \infty} F(X_{n_k}) \leq \limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in D}} \Big\{ \sup_{X \in D \cap \partial B_{r_k}} F(X) \Big\} \leq \limsup_{R \to \infty} \Big\{ \sup_{D \cap \partial B_R} F \Big\}.$$

D'altra parte,

$$F(X) \leq \sup_D F \qquad \text{per ogni} \qquad X \in D,$$

e quindi

$$\limsup_{R \to \infty} \Big\{ \sup_{D \cap \partial B_R} F(X) \Big\} \leq \sup_D F,$$

il che implica

$$\limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in D}} F(X) = \limsup_{R \to \infty} \Big\{ \sup_{D \cap \partial B_R} F \Big\} = \sup_D F.$$

□

Teorema 2. *Siano $D \subset \mathbb{R}^d$ un insieme chiuso ed $F : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua su D. Allora, vale (almeno) una delle proprietà seguenti:*

(1) *esiste un punto $X_0 \in D$ tale che* $F(X_0) = \inf_{X \in D} F(X)$;

(2) $\inf_{X\in D} F(X) = \liminf_{\substack{|X|\to+\infty \\ X\in D}} F(X)$.

Corollario 3. *Siano $D\subset\mathbb{R}^d$ un insieme chiuso ed $F: D\to\mathbb{R}$ una funzione continua su D. Allora, F è limitata su D se e solo se*

$$\liminf_{\substack{|X|\to+\infty \\ X\in D}} F(X) > -\infty \qquad e \qquad \limsup_{\substack{|X|\to+\infty \\ X\in D}} F(X) < +\infty.$$

Corollario 4. *Siano $D\subset\mathbb{R}^d$ un insieme chiuso ed $F: D\to\mathbb{R}$ una funzione continua su D. Allora, F è limitata su D se e solo se*

$$\liminf_{\substack{|X|\to+\infty \\ X\in D}} |F(X)| < +\infty.$$

Esercizi ed esempi

Esercizio 5. *Per ciascuna delle funzioni $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,*

- *trovare i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$;*
- *studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo locale, di minimo locale o punti di sella;*
- *calcolare $\limsup_{X\to\infty} F(X)$ e $\liminf_{X\to\infty} F(X)$;*
- *trovare $\sup_{\mathbb{R}^2} F$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} F$ e dire se sono raggiunti in $\mathbb{R}^2$ oppure sono realizzati all'inifinito.*

(1) $F(x,y) = \dfrac{xy+x}{x^2+y^2+1}$;

(2) $F(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2+1}$;

(3) $F(x,y) = \dfrac{x^2-y}{x^2+y^2+1}$;

(4) $F(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$;

(5) $F(x,y) = \dfrac{y}{x^2+1}$;

(6) $F(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+1}$;

(7) $F(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2+1}$;

(8) $F(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2+1}$;

(9) $F(x,y) = \dfrac{x}{x^2y^2+1}$;

(10) $F(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^4+1}$;

(11) $F(x,y) = \dfrac{x+y}{1+x^2+4y^2}$.

Risposte:

(1) punti critici: $(0,-1)$, $(\sqrt{2},1)$, $(-\sqrt{2},1)$; all'inifinito: $\limsup F = 1/2$, $\liminf F = -1/2$; F ammette un massimo ed un minimo in $\mathbb{R}^2$;

(2) punti critici: $(1,0)$, $(-1,0)$; all'inifinito: $\limsup F = \liminf F = 0$; F ammette un massimo ed un minimo in $\mathbb{R}^2$;

(3) punti critici: $(0,1)$, $(0,-1)$; all'inifinito: $\limsup F = 1$, $\liminf F = 0$; F è limitata; non ammette un massimo e $\sup F = \limsup_{|X|\to\infty} F(X)$; F ammette un minimo in $\mathbb{R}^2$;

(4) l'unico punto critico di F è $(0,0)$ ed è un punto di sella; all'inifinito $\limsup F = 1/2$, $\liminf F = -1/2$; F non ammette ne massimo ne minimo su $\mathbb{R}^2$; F è limitata su $\mathbb{R}^2$;

(5) F non ha punti critici in $\mathbb{R}^2$; all'inifinito $\limsup F = +\infty$, $\liminf F = -\infty$; F non ammette ne massimo ne minimo su $\mathbb{R}^2$; F non è limitata su $\mathbb{R}^2$;

(6) l'unico punto critico di F è $(0,0)$ ed è un punto di sella; all'inifinito $\limsup F = +\infty$, $\liminf F = -\infty$; F non ammette ne massimo ne minimo su $\mathbb{R}^2$; F non è limitata su $\mathbb{R}^2$;

(7) l'unico punto critico di F è $(0,0)$ ed è un punto di sella; all'inifinito $\limsup F = 1$, $\liminf F = -1$; F non ammette ne massimo ne minimo su $\mathbb{R}^2$; F è limitata su $\mathbb{R}^2$;

(8) i punti critici di F sono tutti i punti della forma $(x,0)$ con $x \in \mathbb{R}$; in questi punti, la matrice Hessiana è semi-definita positiva e $F(x,0) = 0$; all'inifinito $\limsup F = 1$, $\liminf F = 0$; F non ammette un massimo su $\mathbb{R}^2$; tutti i punti della forma $(x,0)$ sono punti di minimo (assoluto); F è limitata su $\mathbb{R}^2$;

(9) F non ha punti critici in $\mathbb{R}^2$; all'inifinito $\limsup F = +\infty$, $\liminf F = -\infty$; F non ammette ne massimo ne minimo su $\mathbb{R}^2$; F non è limitata su $\mathbb{R}^2$;

(10) punti critici: $(0,0)$, $(\sqrt{2},1)$, $(-\sqrt{2},1)$, $(\sqrt{2},-1)$, $(-\sqrt{2},-1)$; all'inifinito: $\limsup F = \liminf F = 0$; F ammette un massimo ed un minimo in $\mathbb{R}^2$;

(11) punti critici: $(\sqrt{20/25}, \sqrt{1/20})$, $(-\sqrt{20/25}, -\sqrt{1/20})$; all'inifinito: $\limsup F = \liminf F = 0$; F ammette un massimo ed un minimo in $\mathbb{R}^2$.